

Informe final publicable de proyecto

Dinámica y geometría de espacios homogéneos: aspectos cualitativos y cuantitativos

Código de proyecto ANII: FCE_3_2020_1_162840

Fecha de cierre de proyecto: 01/01/2024

CARVAJALES GOYETCHE, León Seibal (Responsable Técnico - Científico)

ALONSO SIMÓN, Juan (Investigador)

GARCÍA TEJERA, María Victoria (Investigador)

POTRIE, Rafael (Investigador)

SEQUEIRA MANZINO, Emiliano (Investigador)

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA. FACULTAD DE CIENCIAS (Institución Proponente) \\
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA. FACULTAD DE CIENCIAS

Resumen del proyecto

Este proyecto se enmarca en el estudio de la geometría y topología de ciertos espacios que tienen la propiedad de poseer muchas simetrías. El objetivo general fue la construcción de variedades localmente modeladas en dichos espacios, el estudio de su topología, geometría y deformación a través de técnicas dinámicas. Uno de los resultados obtenidos brinda un método sistemático para construir tales variedades, y plantea la interrogante futura de estudiar en profundidad la topología y la geometría de las mismas. En otra línea, también se obtuvieron resultados relativos a la geometría de los espacios de deformación correspondientes, generalizando resultados de Thurston para el caso de superficies hiperbólicas. El estudio más profundo de dicha geometría se encuentra en progreso.

A su vez, parte del objetivo del proyecto era contribuir a la consolidación del estudio de estas temáticas en el país, puesto que su desarrollo local es aún incipiente. Se organizaron eventos internacionales dirigidos a estudiantes, seminarios de posgrado, grupos de trabajo, y se invitó a profesores del exterior. Los miembros del equipo participaron de conferencias internacionales y tuvieron oportunidad de exponer los resultados obtenidos. Se inició la orientación de estudiantes en estas temáticas.

Ciencias Naturales y Exactas / Matemáticas / Matemática Pura / Topología, Geometría y Sistemas Dinámicos

Palabras clave: Dinámica homogénea / Estructuras geométricas / Conteo / Antecedentes, problema de investigación, objetivos y justificación.

El proyecto pretende abordar una temática de desarrollo aún incipiente en el país, pero de creciente actividad en el seno de la comunidad matemática nacional. Se enmarcó en el estudio de variedades geométricas, su topología y su deformación. Las técnicas utilizadas son de origen dinámico, en interacción con la topología y la geometría diferencial y de gran escala, la teoría ergódica y las álgebras y los grupos de Lie. Como tal, se sustentó en el grupo de investigación de sistemas dinámicos de la Udelar, y en el naciente grupo de Geometría y Acciones de Grupos.

A continuación desarrollamos las contribuciones más destacadas del proyecto, enmarcándolas dentro de los correspondientes antecedentes. En todos los casos, el abordaje a los problemas fué el usual en matemática: lectura de bibliografía especializada, intercambio con especialistas locales y del exterior, y reflexión paciente para poder avanzar en la comprensión de las preguntas planteadas. Las temáticas rondan en torno a la teoría de subgrupos discretos de grupos de Lie, y en particular, en torno a la noción de representación de Anosov. Estas representaciones, introducidas por Labourie y Guichard-Wienhard, son objeto de intensos esfuerzos de investigación en el presente en el entendido de que constituyen una generalización natural, al contexto de grupos de Lie de rango superior, de las representaciones convexas co-compactas. Como tales, gozan de buenas propiedades dinámicas y geométricas que permiten la aplicación de diversas técnicas a su estudio.

Junto a F. Stecker obtuvimos una construcción general de dominios de discontinuidad para representaciones de Anosov actuando en espacios homogéneos del grupo de Lie de llegada, por ejemplo, espacios simétricos pseudo-Riemannianos. La construcción está inspirada por trabajos recientes de Kapovich-Leeb-Porti en variedades de banderas, quienes a su vez tomaron inspiración de trabajos importantes de Guichard-Wienhard. Sobre ciertas hipótesis pudimos demostrar que nuestros dominios de discontinuidad son maximales, generalizando resultados obtenidos por Stecker en su tesis doctoral. En particular, esto va en la dirección de comprender cómo es la dinámica fuera de los dominios de discontinuidad (que también era una línea del proyecto), aunque dicha pregunta se encuentra aún abierta. Otro punto interesante es que nuestra construcción brinda poca información sobre la topología del cociente asociado, en contraste con los contextos estudiados por Guichard-Wienhard y Kapovich-Leeb-Porti, en donde en algunos casos se puede calcular la topología o al menos brindar características de la misma (e.g. compacidad). Esto abre la puerta a un programa de largo plazo, que correspondería a estudiar en detalle la topología asociada a dichos dominios de discontinuidad.

Por otra parte, junto a X.Dai, B. Pozzetti y A. Wienhard pudimos generalizar la definición de la métrica asimétrica de Thurston al contexto de representaciones de Anosov. La métrica asimétrica de Thurston es una distancia en el espacio de Teichmüller de una superficie y su introducción y estudio profundo fue abordado por Thurston en los 80. Por nuestra parte, utilizando técnicas dinámicas desarrolladas por Sambarino y Bridgeman-Canary-Labourie-Sambarino pudimos generalizar esta definición al contexto de representaciones de Anosov. Bridgeman-Canary-Labourie-Sambarino habían aplicado estas técnicas para generalizar otra métrica, la de Weil-Petersson. Es notable como, más allá de la definición de

estas métricas, poco conocemos sobre su geometría. Junto a Dai, Pozzetti y Wienhard hemos trabajado intensamente en estudiar nuestra métrica asimétrica en un contexto específico: el de las estructuras proyectivas en superficies (un caso especial de representaciones de Anosov). Se trata de un proyecto de largo plazo, que tiene avances parciales, y que esperamos redondear en el futuro.

Como antecedentes y objetivos de tipo más general, el proyecto pretendía abordar temáticas que son de desarrollo aún incipiente en el país, y como tal, se planteó organizar diversas actividades de formación, divulgación y difusión para dar impulso a las mismas en la comunidad local. En este sentido, organizamos seminarios de posgrado, escuelas internacionales en el país dirigidas a estudiantes, y jornadas de difusión de trabajos de posgrados con asistencia de profesores visitantes. Más aún, junto a Rafael Potrie co-orientamos actualmente la monografía de Licenciatura en Matemática de Pedro Erniaga que aborda el estudio de problemas de dinámica homogénea en co-volumen infinito, unas de las líneas de investigación que proponíamos abordar en el proyecto. Erniaga continuará trabajando en estos temas en su maestría, con fecha de inicio marzo de 2024, y bajo la orientación inicial mía y de Potrie.

Metodología/Diseño del estudio

Como es usual en matemática, el diseño metodológico pasó por el estudio de la bibliografía especializada en el tema, la reflexión paciente y el intercambio permanente con diversos especialistas que permitan el avance en la comprensión de las preguntas a abordar.

Como algunas temáticas son de desarrollo aún incipiente en el país, se propusieron grupos de trabajo enfocados hacia estudiantes, se financiaron visitas de profesores del exterior y la participación de los integrantes del equipo en conferencias internacionales.

Resultados, análisis y discusión

Los resultados de investigación obtenidos fueron en dos direcciones.

Por un lado, junto a F. Stecker obtuvimos una construcción sistemática de variedades geométricas con holonomía Anosov, localmente modeladas en ciertos espacios homogéneos que incluyen a los espacios simétricos pseudo-Riemannianos. Dicha construcción generaliza trabajos de Guichard-Wienhard y Kapovich-Leeb-Porti, quienes trabajaron con espacios de banderas como geometría modelo. Además, con Stecker probamos que en ciertos contextos nuestras construcciones son maximales en un cierto sentido. Los resultados obtenidos abren la pregunta de estudiar en profundidad la topología de las variedades construídas, su geometría, y sus espacios de deformación.

Por otro lado, junto a X. Dai, B. Pozzetti y A. Wienhard generalizamos la teoría de la métrica asimétrica de Thurston al contexto de representaciones de Anosov. La métrica asimétrica fue originalmente introducida por Thurston en su estudio del espacio de estructuras hiperbólicas en una superficie. Nuestra construcción generaliza dicha definición y se basa en técnicas dinámicas desarrolladas por Sambarino y Bridgeman-Canary-Labourie-Sambarino. A su vez, hemos comenzado a trabajar en el estudio profundo de esta métrica en un contexto específico, el espacio de estructuras proyectivas convexas en una superficie.

Por otra parte, pudimos contribuir a la consolidación del estudio de estas temáticas en el país. Se invitó a especialistas del exterior a brindar cursos, se organizaron escuelas de formación internacionales, seminarios de posgrado, y se inició la orientación de estudiantes en el área.

Conclusiones y recomendaciones

Las líneas de investigación desarrolladas obtuvieron primeros resultados que consideramos interesantes. Nos brindan un método sistemático para estudiar la topología y geometría de variedades, y la teoría de sus deformaciones. Ambas líneas generalizan construcciones previas muy celebradas en otros contextos. Surgen naturalmente muchos proyectos de mediano y largo aliento que están siendo abordados en colaboración con expertos de la esfera internacional.

Por otra parte, se puso en contacto a estudiantes e investigadores jóvenes de la esfera local con especialistas del exterior, y se inició la formación específica de estudiantes en las líneas de investigación del proyecto, contribuyendo así al desarrollo del estudio de estas temáticas en el país.

Referencias bibliográficas

Carvajales, L., Stecker, F. Anosov representations acting on homogeneous spaces: domains of discontinuity. Preprint sometido. Disponible en <https://arxiv.org/pdf/2308.08607.pdf>

Carvajales, L., Dai, X., Pozzetti, B., Wienhard, A. Thurston's asymmetric metrics for Anosov representations. Preprint sometido. Disponible en <https://arxiv.org/pdf/2210.05292.pdf>

Licenciamiento

Reconocimiento 4.0 Internacional. (CC BY)