Informe final publicable de proyecto
El problema de la base para formas modulares de Hilbert de peso medio entero

Código de proyecto ANII: FCE_1_2017_1_136609

26/10/2021

TORNARIA, Gonzalo (Responsable Técnico - Científico)
RAMA MORALES, Gustavo Daniel (Investigador)
SIROLLI, NICOLÁS MARTÍN (Investigador)

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA. FACULTAD DE CIENCIAS (Institución Proponente)

Resumen del proyecto

Se trabajó en aspectos teóricos y computacionales de formas de Hilbert de peso medio entero, en particular el problema de la base y fórmulas tipo Waldspurger. Específicamente se desarrollararon métodos para la construcción de formas de Hilbert de peso medio entero estudiada por Xue y Sirolli al mayor nivel de generalidad posible, demostrando una fórmula explícita tipo Waldspurger.

Se realizaron progresos significativos en el desarrollo de capacidades de investigación fundamental en Teoría de números y el fortalecimiento de los vínculos regionales e internacionales, con especial énfasis en la formación de jóvenes investigadores y la consolidación de un grupo de investigación nacional en Teoría de Números.

En el marco del proyecto se desarrollóuna escuela de investigación sobre curvas elípticas para estudiantes de posgrado de la región, contando con la visita de importantes científicos provenientes de Francia, Italia y Holanda. Página de la escuela: http://www.rnta.eu/Montevideo2019/

Aprovechando la oportunidad de la escuela organizamos, en colaboración con el programa Pelota al Medio a la Esperanza del Ministerio del Interior, una actividad para estudiantes de secundaria en el Espacio Avanza de Antel. El Profesor Fernando Rodriguez-Villegas (ICTP, Trieste) dictó una charla de divulgación titulada "Matemáticas y fútbol", que se encuentra disponible en: http://veramas.com.uy/veramas/vod/40292/795

Ciencias Naturales y Exactas / Matemáticas / Matemática Pura / Teoría de Números

Palabras clave: Series theta generalizadas / Fórmula de Waldspurger / Valores centrales de funciones L /

Introducción

El estudio de formas modulares y sus funciones L es central para la Teoría de Números. Sus relaciones con objetos aritmético-geométricos son de gran relevancia y actualidad, como por ejemplo la Conjetura de Taniyama-Shimura que asegura la modularidad de las curvas elípticas racionales [Wil95, TW95, BCDT01]

El "Problema de la Base" para espacios de formas modulares [Eic73] procura la construcción de bases de dichos espacios que sean aritméticamente distinguidas y cuyos coeficientes de Fourier sean fáciles de obtener computacionalmente. Para formas modulares clásicas de peso entero, el problema tiene una larga y rica historia. Fue resuelto por Eichler en muchos casos y la solución más completa puede encontrarse en [HPS89]. En el caso de formas modulares de peso medio entero, los coeficientes de Fourier tienen especial interés debido a su relación con los valores centrales de familias de funciones L, a través de la fórmula de Waldspurger [Wal81] y numerosas variantes [Koh85, GZ86, Gro87, GKZ87, BSP90, BSP92, BM07].

En [Gro87], se presenta una construcción parcial de un cierto subespacio (el espacio de Kohnen) de formas modulares de peso 3/2 y nivel 4p (con p primo); además se da una versión explícita de la fórmula de Waldspurger en este caso. Esta construcción, que utiliza la aritmética de órdenes maximales en álgebras de cuaterniones, permite calcular los valores centrales de funciones L de twists cuadráticos imaginarios de formas modulares f de peso 2 y nivel primo, bajo el supuesto que L(f,1) ? 0. La generalización natural a nivel impar y libre de cuadrados N es muy similar al caso de nivel primo, empleando ordenes de Eichler. Una formula similar a la de Gross ha sido demostrada en [BSP90], pero su aplicación al cálculo de valores centrales de funciones L tiene restricciones adicionales.

En [MRVT07] se introducen ciertas "funciones peso", que permiten proponer una nueva construcción, y se dan ejemplos de su aplicación al cálculo de valores centrales de funciones L en el caso de nivel primo, independientemente de la anulación de L(f,1). Se presentan fórmulas similares a las de Gross que permiten el cálculo de valores centrales de funciones L de todos los twist cuadráticos de formas modulares de peso 2 y nivel primo.

El cálculo de formas modulares de Hilbert de peso entero ha sido un tema de intensa investigación en los últimos años. En [CS01] se trata el caso de Q[?5] y en [SW05] el caso de otros cuerpos cuadráticos reales. En los trabajos más recientes [DV13] y [PS14] se presentan algoritmos para el caso de cuerpos totalmente reales de grado arbitrario. Para el caso de peso medio entero los resultados existentes no son tan completos. Los primeros resultados explícitos se encuentran en [Xue11], para el caso de nivel potencia de primo y número de clases impar, y en [Sir14] se extiende la construcción para el caso de nivel impar. En [RTV14] se hacen cálculos explícitos de esta construcción, y en [ST17] se da una fórmula explícita de tipo Waldspurger bajo ciertas hipótesis.

El presente proyecto plantea algunas hipótesis de investigación, fórmulas complementarias, y construcciones que generalizan dichos resultados. En [RTV14] se hacen cálculos explícitos de formas de Hilbert de peso medio entero dando evidencia a favor de la siguiente conjetura:

Conjetura 1. ([RTV14]) Sea f una forma nueva de Hilbert de peso 2k + 2 y nivel impar libre de cuadrados tal que k satisface la condición de paridad. Entonces existe una forma de Hilbert g de peso k + 3/2 tal que para los discriminantes D permitidos se cumple

L(f, 1/2, chi_D) = k c(D)^2 / N(D)^(k+1/2)

donde c(D) es el coeficiente de Fourier D-ésimo de g y k es una constante positiva.

Las construcciones mencionadas, con los resultados de [ST17], han permitido demostrar esta conjetura en algunos casos, pero siempre bajo la hipótesis L(f, 1/2) != 0.

Para extender la construcción al caso en que L(f, 1/2) = 0, de acuerdo a lo que sabemos del caso de Q, se precisa utilizar funciones peso que generalicen las introducidas en [MRVT07].

Por otra parte en [BM07] se presenta para el caso de Q un resultado más general que se aplica para discriminantes cualesquiera, y que esperamos poder generalizar al caso de formas modulares de Hilbert:

Conjetura 2. En la notación de la Conjetura 1, existe una familia finita de formas de Hilbert g_1, . . . , g_t de peso k + 3/2 tales que para todo discriminante D existe un i tal que

L(f, 1/2, chi_D) = k_i c_i(D)^2 / N(D)^(k+1/2)

donde c_i(D) es el coeficiente de Fourier D-ésimo de g_i, y los k_i son constantes positivas.

Metodología/diseño del estudio

Estrategia de investigación
– Estudio de la bibliografía existente sobre el tema.
– Discusión en seminarios.
– Implementación de algoritmos.
– Cálculo y estudio de ejemplos.
– Preparación de informes y artículos, y difusión en conferencias.

Actividades específicas
– Cálculo de ejemplos de la construcción de [ST17] en el caso L(f , 1/2) != 0.
– Cálculo de ejemplos de la construcción de [ST17] en el caso L(f , 1/2) = 0.
– Determinación de las funciones peso de [MRVT07] generalizadas a cuerpos de números totalmente reales.
– Demostración de la Conjetura 1.
– Demostración de la Conjetura 2.

Estrategia de difusion
– Publicación de artículos en revistas arbitradas.
– Presentación en charlas a nivel regional e internacional.
– Publicación de tablas de cálculos online.
– Promoción de los Encuentros Regionales de Teoría de Números.
– Promoción de una escuela CIMPA en 2019 en Montevideo.
- Organización del Seminario Latinoamericano de Teoría de Números (virtual, desde abril 2020)

Resultados, análisis y discusión

Se ha conseguido el resultado más ambicioso posible: la formulación precisa y demostración completa de las Conjeturas 1 y 2. La primera ya ha sido publicada en [ST20], y la segunda está en un manuscrito casi terminado que se enviará a publicar en breve.

En concreto, nuestra formulación del teorema que resuelve la Conjetura 2 tiene la mayor generalidad posible. No impone ninguna restricción al cuerpo de base (elimina la restricción de número de clases impar) y admite niveles y discriminantes generales.

Conclusiones y recomendaciones

La ejecución del proyecto ha sido muy exitosa, habiendo conseguido los objetivos científicos más ambiciosos planteados inicialmente.

En términos del desarrollo de capacidades de investigación, el proyecto ha tenido un impacto muy significativo. En el período del proyecto completaron sus estudios Gustavo Rama (doctorado) y Santiago Radi (maestría). En la actualidad hay dos estudiantes de grado nuevos realizando su trabajo de grado y que planifican continuar sus estudios de maestría en el área -- facilitado por las actividades de formación ofrecidas en el marco del proyecto.

Se han fortalecido los vínculos regionales e internacionales. Algunas actividades específicas: organización de una escuela CIMPA de investigación en 2019 en Montevideo, organización del Seminario Latinoamericano de Teoría de Números que funciona desde abril de 2020 de manera virtual, etc.

Referencias bibliográficas

[BCDT01] Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond, and Richard Taylor. On the modularity of elliptic curves over Q: wild 3-adic exercises. J. Amer. Math. Soc., 14(4):843–939 (electronic), 2001.

[BM07] Ehud Moshe Baruch and Zhengyu Mao. Central value of automorphic L-functions. Geom. Funct. Anal., 17(2):333–384, 2007.

[BSP90] Siegfried Böcherer and Rainer Schulze-Pillot. On a theorem of Waldspurger and on Eisenstein series of Klingen type. Math. Ann., 288(3):361–388, 1990.

[BSP92] Siegfried Böcherer and Rainer Schulze-Pillot. The Dirichlet series of Koecher and Maass and modular forms of weight 3 2. Math. Z., 209(2):273–287, 1992.

[CS01] Caterina Consani and Jasper Scholten. Arithmetic on a quintic threefold. Internat. J. Math., 12(8):943–972, 2001.

[DV13] Lassina Dembele and John Voight. Explicit methods for Hilbert modular forms. In Elliptic Curves, Hilbert Modular Forms and Galois Deformations, Part II, Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona, pages 135–198. Springer, 2013.

[Eic73] M. Eichler. The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators. In Modular functions of one variable, I (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pages 75–151. Lecture Notes in Math., Vol. 320. Springer, Berlin, 1973.

[GKZ87] B. Gross, W. Kohnen, and D. Zagier. Heegner points and derivatives of L-series. II. Math. Ann., 278(1-4):497–562, 1987.

[Gro87] Benedict H. Gross. Heights and the special values of L-series. In Number theory (Montreal, Que., 1985), volume 7 of CMS Conf. Proc., pages 115–187. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[GZ86] Benedict H. Gross and Don B. Zagier. Heegner points and derivatives of L-series. Invent. Math., 84(2):225–320, 1986.

[HPS89] Hiroaki Hijikata, Arnold K. Pizer, and Thomas R. Shemanske. The basis problem for modular forms on ?0(N). Mem. Amer. Math. Soc., 82(418):vi+159, 1989.

[HTW10] William B. Hart, Gonzalo Tornaría, and Mark Watkins. Congruent number theta coefficients to 1012. In Algorithmic number theory, volume 6197 of Lecture Notes in Comput. Sci., pages 186–200. Springer, Berlin, 2010.

[Koh85] Winfried Kohnen. Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight. Math. Ann., 271(2):237–268, 1985.

[MRVT07] Z. Mao, F. Rodriguez-Villegas, and G. Tornaría. Computation of central value of quadratic twists of modular L-functions. In Ranks of elliptic curves and random matrix theory, volume 341 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., pages 273–288. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[PS14] Ariel Pacetti and Nicolás Sirolli. Computing ideal classes representatives in quaternion algebras. Math. Comp., 83:2479–2507, 2014.

[PT07a] Ariel Pacetti and Gonzalo Tornaría. Examples of Shimura correspondence for level p2 and real quadratic twists. In Ranks of elliptic curves and random matrix theory, volume 341 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., pages 289–314. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[PT07b] Ariel Pacetti and Gonzalo Tornaría. Shimura correspondence for level p2 and the central values of L-series. J. Number Theory, 124(2):396–414, 2007.

[PT08] Ariel Pacetti and Gonzalo Tornaría. Computing central values of twisted L-series: the case of composite levels. Experiment. Math., 17(4):459–471, 2008.

[PT14] Ariel Pacetti and Gonzalo Tornaría. Shimura correspondence for level p2 and the central values of L-series II. Int. J. Number Theory, 10(7):1595–1635, 2014.

[RT07] Holly Rosson and Gonzalo Tornaría. Central values of quadratic twists for a modular form of weight 4.
In Ranks of elliptic curves and random matrix theory,
volume 341 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., pages 315–321. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[RT11] Nathan C. Ryan and Gonzalo Tornaría. A Böcherer-type conjecture for paramodular forms. Int. J. Number Theory, 7(5):1395–1411, 2011.

[RT13] Nathan C. Ryan and Gonzalo Tornaría. Central values of twisted spin L-functions of paramodular forms. http://www.cmat.edu.uy/~tornaria/cnt/ , 2013.

[RT14] Nathan C. Ryan and Gonzalo Tornaría. Formulas for central values of twisted spin L-functions attached to paramodular forms. To appear in Math. Comp., 2014.

[RTV14] Nathan C. Ryan, Gonzalo Tornaria, and John Voight. Nonvanishing of twists of L-functions attached to Hilbert modular forms. In Algorithmic number theory, volume 17 of LMS Journal of Computation and Mathematics, pages 330–348. Cambridge University Press, 2014.

[Sir14] Nicolás Sirolli. Preimages for the shimura map on hilbert modular forms. J. Number Theory, 145:79–98, 2014.

[ST17] Nicolás Sirolli and Gonzalo Tornaría. An explicit Waldspurger formula for Hilbert modular forms. To appear in Transactions of the American Mathematical Society.

[Ste11] William Stein. Sage: Open Source Mathematical Software (Version 4.8). The Sage Group, 2011.

[SW05] Jude Socrates and David Whitehouse.
Unramified Hilbert modular forms, with
examples relating to elliptic curves. Pacific J. Math., 219(2):333–364, 2005.

[Tor04] Gonzalo Tornaría. Data about the central values of the L-series of (imaginary and real) quadratic twists of elliptic curves. http://www.cmat.edu.uy/~tornaria/cnt/ , 2004.

[TW95] Richard Taylor and Andrew Wiles. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. Ann. of Math. (2), 141(3):553–572, 1995.

[Wal81] J.-L. Waldspurger. Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier. J. Math. Pures Appl. (9), 60(4):375–484, 1981.

[Wil95] Andrew Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann. of Math. (2), 141(3):443–551, 1995.

[Xue11] Hui Xue. Central values of L-functions and half-integral weight forms. Proc. Amer. Math. Soc., 139(1):21–30, 2011.

Licenciamiento