AGENCIA NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
E INNOVACIÓN

Informe final publicable de proyecto
Análisis y resolución numérica de problemas con difusión anómala

Código de proyecto ANII: FCE_3_2022_1_172393

Fecha de cierre de proyecto: 01/09/2025

BORTHAGARAY PERADOTTO, Juan Pablo (Responsable Técnico - Científico)
RUEDA NIÑO, José Camilo (Investigador)
BUSTAMANTE BIANCHI, Ignacio (Investigador)
DE LEÓN MACHADO, Lucas Nahuel (Investigador)

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA. FACULTAD DE INGENIERÍA (Institución Proponente) \\
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA. FACULTAD DE INGENIERÍA

Resumen del proyecto

La difusión es el movimiento neto de partículas desde regiones de mayor concentración hacia regiones de menor concentración. Cuando el proceso estocástico subyacente no es browniano, la difusión se dice anómala. En particular, la superdifusión anómala se modela mediante operadores de diferenciación espacial de orden no-entero, que son no-locales y de carácter integro-diferencial. En este proyecto, estudiamos propiedades analíticas y desarrollamos y analizamos herramientas computacionales para el tratamiento de problemas con operadores de este tipo sobre dominios acotados.

Motivados por diversas aplicaciones, tratamos con problemas no-lineales para operadores no-locales. En estas aplicaciones, el relajamiento causado por la incorporación de modelos no-locales permitiría capturar fenómenos que sus contrapartes locales no logran capturar completamente.

La no-localidad conlleva desafíos tanto analítica como computacionalmente. El desarrollo de métodos numéricos se ve dificultado por la presencia de núcleos hipersingulares y la necesidad de integrar sobre dominios no acotados. Mostramos que las soluciones de los problemas correspondientes sean poco regulares, fundamentalmente debido a un pobre comportamiento cerca de la frontera del dominio. Esta regularidad de soluciones es un elemento fundamental a tener en cuenta para el análisis de los métodos numéricos que desarrollamos y juega un papel preponderante en nuestra obtención de estimaciones de error.

Ciencias Naturales y Exactas / Matemáticas / Matemática Aplicada / Análisis, Análisis Numérico
Palabras clave: difusión fraccionaria / método de elementos finitos / /

Antecedentes, problema de investigación, objetivos y justificación.

Este proyecto trata sobre el estudio analítico y el cómputo numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) e integro-diferenciales. Se entiende por difusión al movimiento neto de partículas desde regiones de mayor concentración hacia regiones de menor concentración. Los modelos clásicos de difusión conducen a ecuaciones bien estudiadas. Sin embargo, desde hace un tiempo ha quedado claro que varias de las hipótesis que conducen a estos modelos no siempre son satisfechas [52, 51]. Cuando el proceso subyacente no es browniano, la difusión se dice anómala. La superdifusión anómala se modela mediante operadores de diferenciación espacial de orden no entero (se utiliza el término “fraccionario”, aunque el orden sea cualquier real positivo). Estos operadores son no locales, de carácter integro-diferencial. Un ejemplo emblemático es el laplaciano fraccionario de orden s ($0 < s < 1$) en Rd [39].
Algunos desafíos en la discretización de este operador incluyen la presencia de un núcleo hipersingular y la integración sobre dominios no acotados. El análisis de problemas con difusión fraccionaria en dominios acotados, tanto desde el punto de vista teórico como numérico, es difícil debido al comportamiento no local de las normas fraccionarias y a la baja regularidad de soluciones. El desarrollo de capas límite, fenómeno típico de las soluciones de estos problemas, limita los órdenes de convergencia esperables.
Entre los recientes e importantes avances teóricos en el análisis de problemas no locales, destacamos la extensión de Caffarelli-Silvestre [35] y su utilización en el estudio de regularidad de soluciones [32, 34], y el uso de herramientas de teoría del potencial [33, 57] o de análisis pseudodiferencial [45]. Asimismo, para problemas lineales, la caracterización de regularidad Hölder de soluciones de [57] nos permitió obtener estimaciones de regularidad Sobolev [4]. Más recientemente, en [22] obtuvimos resultados de regularidad Besov óptimos extendiendo una técnica introducida en [58] para problemas locales, consistente en una localización del método de cocientes incrementales de Nirenberg [54].
Paralelamente al avance teórico, el desarrollo de métodos numéricos para problemas lineales fue intenso. Para problemas en dimensión mayor o igual a 2, se han propuesto diversos métodos de diferencias finitas [42, 46, 47,

53], y de elementos finitos [2, 4, 5, 8, 11]. Se tiene una gama de discretizaciones para operadores no locales y que preservan distintas características del problema continuo. Por ejemplo, en general los métodos de elementos finitos no admiten un principio del máximo discreto —para s cercano a 0 las matrices de rigidez se aproximan a matrices de masa correspondientes a un producto interno en L2—, mientras que sí se tiene un principio del máximo discreto si se utilizan métodos de diferencias finitas. En cambio, los métodos de elementos finitos tienen la ventaja de preservar la estructura variacional del problema y de ser permeables a análisis con menos requerimientos de regularidad que los de diferencias finitas.

Por otra parte, existen numerosas aplicaciones en las que los modelos clásicos no logran capturar completamente los fenómenos a estudiar, por lo que resulta de interés explorar modelos no locales; en este proyecto, la interacción entre no localidad y no linealidad es de especial interés. Dada la relación entre suavidad y aproximabilidad de soluciones, para obtener estimaciones de error realistas necesariamente el estudio numérico debe ser complementado por un análisis teórico correspondiente.

Este proyecto investigó en las siguientes cuatro líneas.

(1) Modelos acoplados locales y no locales. En electromagnetismo, la presencia de un metamaterial (material con permitividad o permeabilidad negativa) rodeado de un material clásico da lugar a problemas de transmisión con coeficientes que cambian de signo. Dicho cambio de signo implica que no se pueda asegurar el buen planteo del problema asociado en H1. El buen planteo del problema se puede caracterizar según el cociente entre los coeficientes de permitividad/permeabilidad en ambos materiales: los problemas quedan mal planteados si este cae dentro de un cierto intervalo crítico [13, 14, 15]. Cuando la interfase entre los materiales no es plana, en [18] mostramos que dicho intervalo crítico se reduce si uno reemplaza la forma habitual en H1 por una en Hs, correspondiente a la formulación débil del laplaciano fraccionario de orden s.

El costo computacional de resolver las interacciones no locales puede ser alto, por lo que interesa limitar el modelo no local a un entorno de la interfase y mantener el modelo clásico en el resto del dominio. En [3, 38], para problemas coercivos, se proponen ciertos modelos acoplados entre problemas locales y no locales. Como primera etapa hacia el tratamiento de métodos para problemas con cambio de signo, interesa desarrollar modelos en los que el acoplamiento tenga lugar a nivel de la energía.

(2) Cómputo estable de formulaciones mixtas para el laplaciano fraccionario. Los métodos de elementos finitos mixtos permiten la aproximación de dos o más variables de interés en forma simultánea. Por ejemplo, para el problema de Poisson, permiten aproximar tanto la solución como su gradiente, típicamente referido como flujo. No existen antecedentes en la literatura respecto al uso de métodos mixtos para problemas fraccionarios. Esto se debe a que este tipo de formulaciones pierden la coercividad, y su estabilidad queda sujeta al diseño de espacios de funciones discretas adecuados. En el marco no local, estos espacios no parecen accesibles. Por otra parte, para problemas locales existen métodos estabilizados que permiten considerar aproximaciones por elementos de Lagrange lineales [50].

El proyecto descrito arriba sirve como punto de partida para el estudio de formulaciones que involucren operadores diferenciales fraccionarios (generalizaciones de los operadores de gradiente, divergencia y rotor). En particular, esto es de interés para el tratamiento de un modelo de Oseen-Frank generalizado para cristales líquidos nemáticos. El modelo más sencillo para representar la orientación media de las moléculas de cristales líquidos nemáticos es el de Oseen-Frank [27, 60], que en su formulación más simple corresponde a minimizar una energía de Dirichlet bajo una restricción de largo. Una característica sobresaliente de estos materiales es la presencia de defectos, que son singularidades en el campo de orientaciones. El modelo de Oseen-Frank no es capaz de capturar este fenómeno: defectos de codimensión menor o igual a 2 tienen energía infinita. Un relajamiento poco explorado de la energía de Oseen-Frank [7] consiste en disminuir los requerimientos de diferenciabilidad del campo de orientaciones y reemplazar la seminorma en H1 por una seminorma en Hs. Algunas preguntas importantes están abiertas; en [7] se toma la llamada energía a una constante, que es sencilla analíticamente pero no necesariamente la más relevante en aplicaciones. La formulación completa de la energía de Oseen-Frank incluye los llamados módulos de splay, twist y bend. La extensión de estos módulos al marco no local requiere el uso de cálculo vectorial [41].

(3) Problemas cuasilineales. En el contexto local, el operador p-laplaciano ($p > 1$) es una generalización no lineal del

laplaciano clásico, y es prototípico de procesos de difusión singulares ($1 < p < 2$) o degenerados ($p > 2$). Por esta razón, este operador surge en diversos contextos físicos, como fluidos no newtonianos [9] y flujos turbulentos en medios porosos [40].

A pesar de los avances recientes para problemas lineales, el tratamiento de difusión anómala cuasilineal es incipiente. Al momento de iniciar el proyecto, para el problema de Dirichlet para el llamado (p,s)-laplaciano —generalización del p-laplaciano al marco no local—, se contaban con algunos resultados parciales de regularidad [29, 30, 48]. Sin embargo, estos no son del todo satisfactorios para un análisis de elementos finitos, ya que para ese fin es necesario contar con una teoría de regularidad Sobolev hasta el borde del dominio.

Por otra parte, el tratamiento numérico de este tipo de problemas conlleva, además de las dificultades propias de la no localidad, aquellas asociadas con la no linealidad. El antecedente más cercano involucra discretizaciones por elementos finitos para problemas de superficies mínimas fraccionarias [20, 21], pero no es claro que los métodos de flujo de gradiente allí desarrollados permitan lidiar de forma satisfactoria con la no linealidad de las ecuaciones resultantes para el (p,s)-laplaciano.

(4) Problemas de obstáculo. La ejecución de opciones americanas en finanzas da lugar a desigualdades variacionales. Las EDPs resultantes se llaman problemas de obstáculo, donde el obstáculo es la función de pago. Estos son problemas de frontera libre; además de la función incógnita, se desconoce la región de contacto con el obstáculo. Si los activos se modelan mediante procesos de Lévy, se obtienen ecuaciones integro-diferenciales [28]. En [12, 23, 31, 56] se proponen diversos métodos de elementos finitos para problemas de obstáculo fraccionarios. Estos trabajos obtienen aproximaciones de igual orden que para problemas lineales: la regularidad de soluciones está dictada por el comportamiento cerca de la frontera del dominio y no por la frontera libre. Sin embargo, la falta de un principio del máximo discreto impide obtener estimaciones de aproximación para dicha frontera libre. Un camino viable para lograr esto son los métodos de diferencias finitas [46].

Finalmente, los problemas en dimensiones altas son relevantes en aplicaciones (en finanzas, usualmente cada dimensión corresponde a un activo en el portafolio a valuar), y en ellos el costo de métodos estructurados (elementos finitos, diferencias finitas) es prohibitivo. Las redes neuronales ofrecen una interesante alternativa. En años recientes surgieron diversas técnicas no estructuradas para el tratamiento de EDPs [36, 43, 49, 59]; en [10] obtuvimos una demostración de la convergencia casi segura de ellas. El método que proponemos en [10] utiliza un funcional de mínimos cuadrados, que podría adaptarse a problemas de obstáculo siguiendo ideas de [44].

El objetivo general de este proyecto fue el estudio de propiedades teóricas y el desarrollo de técnicas computacionales para el estudio de operadores integro-diferenciales. Como disparador, se utilizaron los cuatro problemas específicos mencionados arriba. Dada la relación entre suavidad y aproximabilidad de soluciones, para obtener estimaciones de error realistas los estudios numéricos deben estar necesariamente complementados por el análisis teórico de soluciones. Concretamente, la regularidad de soluciones débiles es un aspecto fundamental a considerar. Asimismo, es relevante el diseño de métodos numéricos que preserven propiedades teóricas de interés en cada problema. Por otra parte, más allá del contenido académico, este proyecto se puso como prioridad el impulso de la formación de un grupo de trabajo en el país en el área de análisis numérico de EDPs y fortalecer vínculos ya existentes con investigadores en el exterior.

Respecto a las cuatro líneas mencionadas anteriormente, marcamos los siguientes objetivos específicos.

(1) Para modelos acoplados locales y no locales, buscamos formulaciones que realicen el acoplamiento a nivel de la energía, para las que podamos probar el buen planteo y obtener la formulación de la forma fuerte de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas. Se procura realizar simulaciones numéricas que permitan clarificar el comportamiento de soluciones cerca de la interfase, y establecer resultados de regularidad de soluciones que permitan aplicar herramientas de análisis numérico para obtener estimaciones de error. Un objetivo posterior es, para el caso no coercivo, demostrar que el intervalo crítico se reduce al utilizar modelos no locales, y estudiar el buen planteo del acoplamiento entre modelos locales y no locales en este contexto.

(2) Formulaciones mixtas y energía de Oseen-Frank no local. Aquí, el objetivo a largo plazo consiste en generalizar la energía de Oseen-Frank al contexto no local, comparar el modelo resultante con su contraparte clásica y desarrollar métodos numéricos para su simulación computacional. Como etapa intermedia, se apunta al estudio de formulaciones mixtas fraccionarias, su análisis teórico e implementación práctica usando elementos finitos de

Lagrange de primer orden.
(3) Para problemas cuasilineales, se apunta a obtener estimaciones de regularidad Sobolev hasta el borde del dominio involucrando operadores del tipo (p,s)-laplaciano. Discretizar problemas de este tipo, y desarrollar nuevas técnicas para llegar a estimaciones óptimas de error.
(4) Respecto a problemas de obstáculo, este proyecto se propone desarrollar y analizar nuevos métodos numéricos para la versión fraccionaria, obtener estimaciones de convergencia para la frontera libre a partir de estimaciones en norma del máximo y el uso de barreras discretas. Asimismo, para problemas de obstáculo clásicos, desarrollar algoritmos no estructurados para tratar con problemas en dimensión alta y establecer su Gamma-convergencia casi segura.

Metodología/Diseño del estudio

Al tratarse de un proyecto de matemática, la metodología de trabajo se centra en el análisis teórico, la formulación de modelos, y la demostración de resultados; además, en la investigación en análisis numérico de EDPs la validación computacional juega un papel preponderante. Concretamente, la estrategia general de investigación de este proyecto consiste en acompañar el estudio teórico de los problemas a tratar con su simulación numérica. Esto tiene como fines tanto la validación de resultados teóricos como fomentar un mayor entendimiento de los problemas (por ejemplo, realizando experimentos bajo condiciones que vayan más allá de las utilizadas en el marco teórico). Una componente fundamental en el trabajo es el intercambio con otros investigadores, comunicar resultados preliminares en congresos y eventos, y estar en contacto con nuevas ideas y aplicaciones. En el trabajo con estudiantes, se mantuvieron reuniones periódicas (en general, semanales) para intercambiar ideas, presentar avances y explorar nuevos caminos de investigación.
A continuación, presentamos las estrategias seguidas para perseguir los cuatro objetivos específicos mencionados anteriormente.
(1) Realizaremos el acoplamiento de modelos locales y no-locales a nivel de la energía, obteniendo así problemas con estructura variacional que puedan ser discretizados con el método de elementos finitos. Se realizaron simulaciones tomando como punto de partida nuestro código [2] para verificar los resultados y estudiar el efecto que tiene la interacción entre los dos materiales.
(2) El primer paso hacia este objetivo consiste en desarrollar un cálculo vectorial fraccionario discreto [37, 41]. Dado que se consideró poco probable que se pudieran obtener resultados satisfactorios trabajando con las formas fuertes (puntuales) de estos operadores, la estrategia consistió en utilizar métodos de elementos finitos y trabajar sobre formas débiles.
(3) En [22], obtuvimos estimaciones de regularidad para problemas lineales en dominios Lipschitz mediante una técnica puramente variacional. Explotamos el hecho de que las soluciones de los problemas a estudiar son mínimos de ciertos funcionales de energía, una caracterización de espacios de Besov en términos de módulos de continuidad, y una técnica de localización [58] que es afín con la convexidad del problema. Extender esta técnica al contexto cuasi-lineal fue el primer paso a seguir para alcanzar el tercer objetivo específico mencionado arriba. Para discretizaciones por elementos finitos, una vez que se tienen estimaciones de regularidad de soluciones, se pueden utilizar argumentos estándar para obtener cotas de error en la norma de energía.
Por otra parte, el operador asociado a la primera variación de las seminormas de Lions-Calderón comparte varios aspectos analíticos con el (p,s)-laplaciano fraccionario mencionado anteriormente. Los operadores asociados a seminormas de Lions-Calderón pueden ser aproximados mediante métodos de Lagrangianos aumentados.
(4) Las técnicas conocidas para la aproximación de fronteras libres [55] requieren de la no-degeneración de estos conjuntos y del uso de principio del máximo discretos. Para el problema del obstáculo para el laplaciano fraccionario, se tienen resultados positivos para el primer requerimiento (ver [34], por ejemplo). Sin embargo, es sabido que utilizar discretizaciones con métodos de elementos finitos continuos no preserva el principio del máximo en general. Por esta razón, utilizamos un método de diferencias finitas [46]. Para evitar caer en requerimientos no realistas de regularidad de soluciones para asegurar la consistencia del método, la estrategia seguida consistió en descomponer el laplaciano fraccionario como la suma de un operador de orden cero escalado y un término integral (correspondiente a interacciones de largo rango), y utilizar dos escalas discretas.

Por otra parte, para el tratamiento de problemas en dimensión alta, utilizamos un enfoque de tipo mínimos cuadrados y realizamos aproximaciones mediante redes neuronales en mallas no estructuradas.

Resultados, análisis y discusión

Considero que el proyecto ha dado muy buenos resultados, tanto en cuanto a la calidad de las publicaciones a las que ha dado lugar, como en el estímulo a la formación de un grupo de trabajo local en el área. Entiendo que se han abierto algunas líneas nuevas muy prometedoras para seguir investigando y apuntalando la formación de investigadores. Respecto a los cuatro problemas/líneas que configuran al proyecto, listamos brevemente los resultados obtenidos.
(1) Conseguimos avances en el buen planteo y formulación de la forma fuerte de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a ciertos problemas de minimización de energía con componentes locales y no-locales. Realizamos simulaciones numéricas que van en línea con ciertos resultados teóricos un tanto sorpresivos respecto al comportamiento de soluciones cerca de la interfase. Obtuvimos estimaciones de regularidad de soluciones para subdominios de clase Lipschitz (en particular, esto permite el tratamiento de interfases con ángulos, que es de interés en la práctica), y de convergencia para discretizaciones con elementos finitos lineales. Estos resultados fueron recolectados en el artículo [17], sometido a publicación, y presentados oralmente en el congreso Nonlocality: challenges in modeling and simulation, en Providence (EEUU), en abril de 2024.
(2) Esta línea nos fue llevando hacia el estudio del problema de Darcy fraccionario. Además del trabajo teórico de ese problema, nuestro interés principal estaba en su implementación computacional en dimensión 2 con elementos finitos lineales, que logró llevar adelante el estudiante de maestría Nahuel de León. Hemos terminado el desarrollo teórico y realizado simulaciones numéricas que van en línea con nuestras predicciones, y estamos terminando la redacción del artículo [19] al respecto.
Los resultados preliminares que obtuvimos fueron presentados por Nahuel en el XL Congreso Argentino de Mecánica Computacional, en Rosario (Argentina) en noviembre de 2024 [6] y mediante un póster en el evento Nonlocal Equations: Analysis and Numerics en Bielefeld (Alemania) en marzo de 2025. Nahuel también dará una presentación oral en el III Encuentro Conjunto RSME-UMA en Bariloche (Argentina) en diciembre de 2025.
(3) Desde el punto de vista teórico, hemos obtenido un resultado que considero es muy bueno y que ha sido aceptado en una revista de primer nivel en el área de análisis de EDPs. En [16] probamos, para problemas de Dirichlet involucrando a operadores no-locales cuasi-lineales en una amplia clase que incluye al (p,s)-laplaciano, estimaciones de regularidad Besov globales en dominios de clase Lipschitz. Estas estimaciones nos permitieron obtener cotas de error para aproximaciones por elementos finitos. Junto al estudiante de doctorado José Camilo Rueda y su co-orientador Leandro Del Pezzo, conseguimos adaptar esta técnica para el estudio de regularidad de soluciones de problemas análogos involucrando el (p,s)-laplaciano de Lions-Calderón [25]. Por otra parte, hemos desarrollado un método de descomposición-coordinación para el cómputo eficiente de soluciones de elementos finitos, y finalizado un primer abordaje teórico con estimaciones de error a priori [26].
Los resultados que obtuvimos en esta línea de trabajo fueron presentados por José Camilo mediante un póster en el evento Nonlocal Equations: Analysis and Numerics en Bielefeld (Alemania) en marzo de 2025, y por el responsable del proyecto mediante una presentación oral en The 15th International Conference on Spectral and High Order Methods en Montréal (Canadá) en julio de 2025. José Camilo dará una presentación oral en el III Encuentro Conjunto RSME-UMA en Bariloche (Argentina) en diciembre de 2025 y por mí en el Symposium on Analysis, Partial Differential Equations And Applications a desarrollarse en São Paulo (Brasil) en octubre del corriente año.
(4) En primer lugar, desarrollamos un método a dos escalas y que posee un principio del máximo discreto para el tratamiento de una clase de operadores integrodiferenciales [24]. Esto nos permitió obtener estimaciones de error en norma del máximo para problemas lineales (en concordancia con resultados obtenidos por otros investigadores recientemente), así como para el problema del obstáculo y, más interesantemente, para la aproximación de la frontera libre en dicho problema; adaptando una idea conocida para problemas locales, nuestros resultados permiten generar discretizaciones monótonas y convergentes para problemas de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman no locales. Por otra parte, en [1] hemos desarrollado un método no estructurado usando redes neuronales para

desigualdades variacionales clásicas (locales), y tenemos un resultado de Gamma-convergencia casi segura para nuestras discretizaciones.
Presenté, en forma oral, los resultados obtenidos en esta línea en los congresos Seventh Chilean Workshop on Numerical Analysis of Partial Differential Equations y Free Boundary Problems, realizados en Concepción (Chile) en enero de 2024 y en João Pessoa (Brasil) en agosto de 2024, respectivamente.
Un resultado longitudinal a las líneas (1), (2), (3), es el de un incipiente desarrollo en el tratamiento computacional de operadores del cálculo no local que surgen al tomar potenciales de Riesz de operadores clásicos. Estos operadores están asociados a interpolaciones complejas entre espacios de Sobolev, en contraposición con los asociados a interpolaciones reales, bastante más explorados en la literatura. Los resultados obtenidos en este proyecto servirán como punto de partida para futuras investigaciones tanto a nivel teórico como en aplicaciones. Profundizamos en este punto en la sección de Conclusiones y Recomendaciones.

Conclusiones y recomendaciones

Este proyecto ha generado contribuciones tanto en el avance del conocimiento como en la formación de investigadores y de nuevas capacidades en el país.
En cuanto al avance del conocimiento, esta propuesta logró avances en una temática de interés en la comunidad matemática, como es el estudio de operadores no locales y la relación entre no localidad y no linealidad. En los últimos años, el análisis y el análisis numérico de operadores fraccionarios ha visto un creciente interés debido a su mayor flexibilidad de modelado respecto a los modelos clásicos y, en algunas aplicaciones, a la mayor estabilidad de soluciones que permite capturar fenómenos que sus contrapartes clásicas no logran modelar satisfactoriamente. Este proyecto ha conseguido resultados que avanzan el entendimiento teórico y la aproximación computacional de problemas de este tipo. Estos resultados se han presentado tanto en forma de artículos publicados y sometidos a publicación en revistas especializadas, en comunicaciones en congresos y seminarios locales.
En cuanto a la generación de nuevas capacidades científico-tecnológicas, se fomentó la formación de un grupo de trabajo en el país en el área de análisis numérico de EDPs. El involucramiento de estudiantes, además de potenciar la investigación específica del proyecto, ha servido como combustible para la generación de espacios —cursos y seminarios de posgrado— en el área. Además, desde marzo de 2023 tenemos un seminario estable, de frecuencia bisemanal, sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales y Afines, que ha servido como foro tanto para que visitantes puedan comunicar sus ideas a nuestra comunidad, como para exponer e intercambiar sobre ideas en progreso. El público habitual de dicho seminario está formado mayoritariamente por estudiantes de posgrado en matemática. Al tener contacto con investigadores en el exterior, nuestros estudiantes van consiguiendo nuevas oportunidades y abriendo sus propios caminos.
Este proyecto ha dado marco teórico al trabajo de dos estudiantes de posgrado en matemática: Nahuel De León (maestría) y José Camilo Rueda (doctorado, co-orientado con Leandro Del Pezzo). Además, ambos se han beneficiado del proyecto recibiendo apoyo para presentar sus avances, tanto en eventos regionales como internacionales, lo que les ha dado visibilidad y la posibilidad de establecer nuevos contactos académicos.
Respecto a aspectos técnicos del proyecto y futuras líneas de trabajo, los resultados han sido auspiciosos. El proyecto ha dado lugar a nuevas ideas respecto al tratamiento de problemas asociados a espacios de Lions-Calderón; estos espacios permiten una interpretación más transparente de objetos del cálculo diferencial estándar y cumplen el mismo objetivo de relajar formulaciones clásicas que los espacios de Gagliardo-Slobodeckij. No obstante, su tratamiento numérico es un poco más dificultoso e incluso más costoso: en lenguaje simple, para obtener un operador de derivación (gradiente, divergencia, rotor y sus composiciones, tanto lineales como no lineales) en los espacios de Gagliardo-Slobodeckij uno realiza todas las operaciones básicas involucradas (cocientes incrementales, aplica funciones lineales o no sobre ellos) y luego integra todo junto; en los espacios de Lions-Calderón, uno integra luego de cada operación básica, aplica las funciones necesarias sobre los operadores integrados, y vuelve a integrar. Esto da lugar a un mucho mayor costo computacional asociado a los operadores en la escala de Lions-Calderón.
Es de destacar que los operadores laplaciano asociados en ambos casos coinciden (en el fondo, esto es una

manifestación del hecho de que la transformada de Fourier es un isomorfismo en L2) y por lo tanto se puede usar la formulación de Gagliardo-Slobodeckij para tal operador en espacios de Lions-Calderón. Esto resulta ser clave porque habilita el uso de métodos de lagrangiano aumentado que venimos explorando en la etapa final del proyecto. En el mes de mayo de este año, realicé una estadía de trabajo en ENSTA (París, Francia) en la que discutimos varias aplicaciones y extensiones posibles de esta idea. En este nuevo camino, he involucrado a dos nuevos investigadores y una postdoc de dicha institución. Es de esperar que los objetivos que fueron marcados como 'parcialmente cumplidos' en el apartado 'Objetivos y Resultados' del informe se puedan completar con esta nueva perspectiva.

Por último, quiero destacar la calidad del apoyo administrativo que tuvo el proyecto, tanto desde la Facultad de Ingeniería como desde la ANII. Todas mis preguntas e inquietudes siempre fueron atendidas de forma muy eficiente y con amabilidad.

A modo de síntesis, este proyecto ha logrado sus dos objetivos centrales: por un lado, realizó contribuciones significativas y de vanguardia al conocimiento teórico y numérico en el análisis de operadores no locales, y por el otro, consolidó y fomentó la formación de un grupo de trabajo y de nuevos investigadores en el país, creando un ecosistema académico dinámico y con proyección internacional. Los auspiciosos resultados obtenidos, las colaboraciones establecidas y las nuevas líneas de investigación abiertas son muestra del impacto del trabajo realizado.

Productos derivados del proyecto

Tipo de producto	Título	Autores	Identificadores	URI en repositorio de Silo	Estado
Artículo científico	Quasi-linear fractional-order operators in Lipschitz domains	J. P. Borthagaray, W. Li, R. H. Nochetto		https://hdl.handle.net/20.500.12008/47504	Finalizado
Artículo científico	Monotone two-scale methods for a class of integrodifferential operators and applications	J. P. Borthagaray, R. H. Nochetto, A. J. Salgado, C. Torres		https://hdl.handle.net/20.500.12008/47503	Finalizado
Artículo científico	On some coupled local and nonlocal diffusion models	J.P. Borthagaray, P. Ciarlet Jr.		https://hdl.handle.net/20.500.12008/50405	Finalizado
Artículo científico	A deep first-order system least squares method for the obstacle problem	G. Acosta, F. Bersetche, E. Belén, J.P. Borthagaray		https://hdl.handle.net/20.500.12008/51260	Finalizado
Artículo científico	A mixed formulation for the fractional Poisson problem	J.P. Borthagaray, N. de León			En proceso
Artículo científico	Besov regularity of solutions to the Dirichlet problem for the Bessel (p,s)-Laplacian	J.P. Borthagaray, L. Del Pezzo, J.C. Rueda			En proceso
Artículo científico	Finite element approximation of the Dirichlet	J.P. Borthagaray, L. Del Pezzo,			En proceso

Tipo de producto	Título	Autores	Identificadores	URI en repositorio de Silo	Estado
	problem for the Bessel (p,s)-Laplacian	J.C. Rueda			
Resumen de conferencia publicado	Una formulación mixta para el problema de Poisson fraccionario	W. Angulo, J.P. Borthagaray, N. De León		https://hdl.handle.net/20.500.12008/47498	Finalizado
Póster	A mixed formulation for the fractional Poisson problem	W. Angulo, J.P. Borthagaray, N. De León		https://hdl.handle.net/20.500.12008/50498	Finalizado
Póster	Fractional (p, s)-Laplacian: A numerical approach	J.P. Borthagaray, L. Del Pezzo, J.C. Rueda		https://hdl.handle.net/20.500.12008/50497	Finalizado

Referencias bibliográficas

[1] G. Acosta, F.M. Bersetche, E. Belén, and J.P. Borthagaray. A deep first-order system least squares method for the obstacle problem. Enviado, 2025.
[2] G. Acosta, F.M. Bersetche, and J.P. Borthagaray. A short FE implementation for a 2D homogeneous Dirichlet problem of a fractional Laplacian. Computers & Mathematics with Applications, 74(4):784–816, 2017.
[3] G. Acosta, F.M. Bersetche, and J.D. Rossi. Local and nonlocal energy-based coupling models. arXiv preprint arXiv:2107.05083, 2021.
[4] G. Acosta and J.P. Borthagaray. A fractional Laplace equation: regularity of solutions and finite element approximations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 55(2):472–495, 2017.
[5] M. Ainsworth and C. Glusa. Aspects of an adaptive finite element method for the fractional Laplacian: a priori and a posteriori error estimates, efficient implementation and multigrid solver. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 327:4–35, 2017.
[6] W. Angulo, J. P. Borthagaray, and N. de León. Una formulación mixta para el problema de Poisson fraccionario. Mecánica Computacional, 41(15):781–790, 2024.
[7] H. Antil, S. Bartels, and A. Schikorra. Approximation of fractional harmonic maps. arXiv preprint arXiv:2104.10049, 2021.
[8] H. Antil, P. Dondl, and L. Striet. Approximation of integral fractional Laplacian and fractional PDEs via sinc-basis. SIAM J. Sci. Comput., 43(4):A2897–A2922, 2021.
[9] C. Atkinson and C.W. Jones. Similarity solutions in some non-linear diffusion problems and in boundary-layer flow

of a pseudo-plastic fluid. Quart. J. Mech. Appl. Math., 27(2):193–211, 1974.
[10] F.M. Bersetche and J.P. Borthagaray. A deep first-order system least squares method for solving elliptic PDEs. arXiv preprint arXiv:2204.07227, 2022.
[11] A. Bonito, W. Lei, and J.E. Pasciak. Numerical approximation of the integral fractional Laplacian. Numerische Mathematik, 142(2):235–278, 2019.
[12] A. Bonito, W. Lei, and A.J. Salgado. Finite element approximation of an obstacle problem for a class of integro–differential operators. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 54(1):229–253, 2020.
[13] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Carvalho, and P. Ciarlet, Jr. Mesh requirements for the finite element approximation of problems with sign-changing coefficients. Numer. Math., 138:801–838, 2018.
[14] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, and P. Ciarlet, Jr. T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials. Math. Mod. Num. Anal., 46:1367–1387, 2012.
[15] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, and X. Claeys. Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial. Math. Models Methods Appl. Sci., 23:1629–1662, 2013.
[16] J.P. Borthagaray and P. Ciarlet, Jr. On some coupled local and nonlocal diffusion models. Enviado, 2025.
[17] J.P. Borthagaray and P. Ciarlet Jr. Nonlocal models for interface problems between dielectrics and metamaterials. In International Congress on Engineered Material Platforms for Novel Wave Phenomena, pages 61–63, 2017.
[18] J.P. Borthagaray and N. de León. A mixed formulation for the fractional Poisson problem. En preparación.
[19] J.P. Borthagaray, W. Li, and R. Nochetto. Finite element discretizations for nonlocal minimal graphs: Convergence. Nonlinear Analysis, 189:111566, 31, 2019.
[20] J.P. Borthagaray, W. Li, and R. Nochetto. Finite element algorithms for nonlocal minimal graphs. Mathematics in Engineering, 4(2):1–29, 2021.
[21] J.P. Borthagaray, W. Li, and R.H. Nochetto. Quasi-linear fractional-order operators in Lipschitz domains. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 56(3):4006–4039, 2024.
[22] J.P. Borthagaray and R. Nochetto. Besov regularity of the Dirichlet problem for the fractional Laplacian in Lipschitz Domains. Journal of Functional Analysis, 284(6):109829, 2023.
[23] J.P. Borthagaray, R. Nochetto, and A. Salgado. Weighted Sobolev regularity and rate of approximation of the obstacle problem for the integral fractional Laplacian. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 29(14):2679–2717, 2019.
[24] J.P. Borthagaray, R. Nochetto, A. Salgado, and C. Torres. Monotone two-scale methods for a class of integrodifferential operators and applications. Por aparecer en Interfaces and Free Boundaries.
[25] J.P. Borthagaray, L.D. Pezzo, and J. Rueda. Besov regularity of solutions to the Dirichlet problem for the Bessel (p,s)-Laplacian. En preparación.
[26] J.P. Borthagaray, L.D. Pezzo, and J. Rueda. Finite element approximation of the Dirichlet problem for the Bessel (p,s)-Laplacian. En preparación.
[27] J.P. Borthagaray and S. Walker. The Q-tensor model with uniaxial constraint. In Geometric Partial Differential Equations – Part II, volume 22 of Handbook of Numerical Analysis, pages 313–382. Elsevier, 2021.
[28] S. Boyarchenko and S. Levendorskii. Perpetual American options under Lévy processes. SIAM Journal on Control and Optimization, 40(6):1663–1696, 2002.
[29] L. Brasco and E. Lindgren. Higher Sobolev regularity for the fractional p-Laplace equation in the superquadratic case. Adv. Math., 304:300–354, 2017.
[30] L. Brasco, E. Lindgren, and A. Schikorra. Higher Hölder regularity for the fractional p-Laplacian in the superquadratic case. Adv. Math., 338:782–846, 2018.
[31] O. Burkovska and M. Gunzburger. Regularity analyses and approximation of nonlocal variational equality and inequality problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 478(2):1027–1048, 2019.
[32] L. Caffarelli, J.-M. Roquejoffre, and O. Savin. Nonlocal minimal surfaces. Communications on Pure and Applied Mathematics, 63(9):1111–1144, 2010.
[33] L. Caffarelli, X. Ros-Oton, and J. Serra. Obstacle problems for integro-differential operators: regularity of solutions and free boundaries. Inventiones mathematicae, 208(3):1155–1211, 2017.

[34] L. Caffarelli, S. Salsa, and L. Silvestre. Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian. Invent. Math., 171(2):425–461, 2008.
[35] L. Caffarelli and L. Silvestre. An extension problem related to the fractional Laplacian. Communications in Partial Differential Equations, 32(7-9):1245–1260, 2007.
[36] Z. Cai, J. Chen, M. Liu, and X. Liu. Deep least-squares methods: An unsupervised learning-based numerical method for solving elliptic PDEs. Journal of Computational Physics, 420:109707, 2020.
[37] M. D'Elia, M. Gulian, T. Mengesha, and J.M. Scott. Connections between nonlocal operators: from vector calculus identities to a fractional Helmholtz decomposition. Fractional Calculus and Applied Analysis, 25(6):2488–2531, 2022.
[38] M. D'Elia, X. Li, P. Seleson, X. Tian, and Y. Yu. A review of local-to-nonlocal coupling methods in nonlocal diffusion and nonlocal mechanics. Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling, 4:1–50, 2022.
[39] E. Di Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. Bulletin des Sciences Mathématiques, 136(5):521–573, 2012.
[40] J. Diaz and F. De Thelin. On a nonlinear parabolic problem arising in some models related to turbulent flows. SIAM J. Math. Anal., 25(4):1085–1111, 1994.
[41] Q. Du, M. Gunzburger, R. Lehoucq, and K. Zhou. A nonlocal vector calculus, nonlocal volume-constrained problems, and nonlocal balance laws. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 23(03):493–540, 2013.
[42] S. Duo, H. van Wyk, and Y. Zhang. A novel and accurate finite difference method for the fractional Laplacian and the fractional Poisson problem. J. Comput. Phys., 355:233–252, 2018.
[43] W. E and B. Yu. The deep Ritz method: a deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems. Communications in Mathematics and Statistics, 6(1):1–12, 2018.
[44] T. Führer. First-order least-squares method for the obstacle problem. Numerische Mathematik, 144(1):55–88, 2020.
[45] G. Grubb. Fractional Laplacians on domains, a development of Hörmander's theory of ?-transmission pseudodifferential operators. Advances in Mathematics, 268:478–528, 2015.
[46] R. Han and S. Wu. A monotone discretization for integral fractional Laplacian on bounded Lipschitz domains: Pointwise error estimates under Hölder regularity. SIAM Journal on Numerical Analysis, 60(6):3052–3077, 2022.
[47] Y. Huang and A. Oberman. Numerical methods for the fractional Laplacian: A finite difference-quadrature approach. SIAM J. Numer. Anal., 52(6):3056–3087, 2014.
[48] A. Iannizzotto, S. Mosconi, and M. Squassina. Fine boundary regularity for the degenerate fractional p-Laplacian. J. Funct. Anal., 279(8):108659, 54, 2020.
[49] L. Lyu, Z. Zhang, M. Chen, and J. Chen. MIM: A deep mixed residual method for solving high-order partial differential equations. Journal of Computational Physics, 452:110930, 2022.
[50] A. Masud and T.J.R. Hughes. A stabilized mixed finite element method for Darcy flow. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 191(39-40):4341–4370, 2002.
[51] R. Metzler and J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Physics Reports, 339(1):1–77, 2000.
[52] R. Metzler and J. Klafter. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 37(31):R161–R208, 2004.
[53] V. Minden and L. Ying. A simple solver for the fractional Laplacian in multiple dimensions. SIAM J. Sci. Comput., 42(2):A878–A900, 2020.
[54] L. Nirenberg. Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 8(4):648–674, 1955.
[55] R. Nochetto. A note on the approximation of free boundaries by finite element methods. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 20(2):355–368, 1986.
[56] R. Nochetto, E. Otárola, and A. Salgado. Convergence rates for the classical, thin and fractional elliptic obstacle problems. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 373(2050):20140449, 2015.
[57] X. Ros-Oton and J. Serra. The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary.

Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 101(3):275–302, 2014.
[58] G. Savaré. Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains. Journal of Functional Analysis, 152(1):176–201, 1998.
[59] J. Sirignano and K. Spiliopoulos. DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations. Journal of Computational Physics, 375:1339–1364, 2018.
[60] E.G. Virga. Variational Theories for Liquid Crystals, volume 8. Chapman and Hall, London, 1st edition, 1994.